

## Minste kvadraters metode – en historisk reise

v/Rune Øverland, Trainor Elsikkerhet AS

Minste kvadraters metode er et matematisk verktøy for behandling av (måle-)observasjoner; enten det gjelder å bestemme en kalibreringskurve eller estimere en kometbane.

Metoden brukes når man skal bestemme en teoretisk modell ut i fra observerte verdier. Vi velger en løsning slik at spriket mellom observasjonene og den teoretiske modellen blir minst mulig. Metoden er i dag en av de viktigste og mest anvendte.

Bakgrunnen for metoden spenner seg over et tidsrom på mer enn hundre år, bitre personkonflikter med mer.

### Pytagoras teorem

Minste kvadraters metode bruker, ja nettopp, kvadrater.

Matematisk har metoden derfor røtter i det pytagoreiske teorem som indikerer at når et avvik er uavhengig av den estimerte kvantiteten, kan vi addere det kvadrerte avviket og den kvadrerte estimerte kvantiteten.

Minste kvadraters metode kan derfor spores helt tilbake til antikkens greske matematikere (Pytagoras ca 580 – 500 BC).

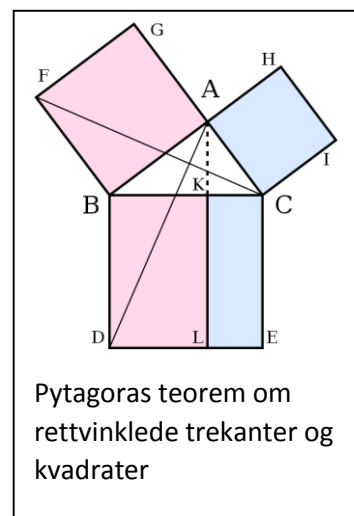
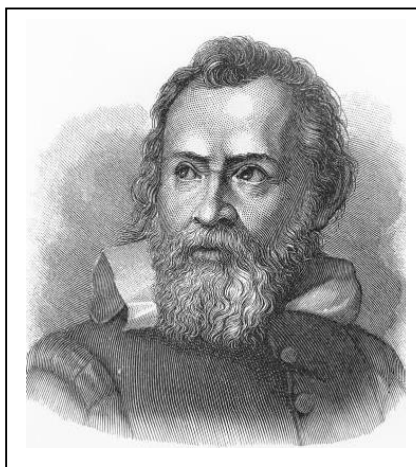
### Ellipser

Apollonius (ca 262 – 190 BC) er kjent som den største geometeren i antikken. Han ga ellipser, parabler og hyperbler navn, og utviklet den greien av matematikken som kalles kjeglesnitteori. Hans kjente verk "Conics" består av åtte bøker om emnet.

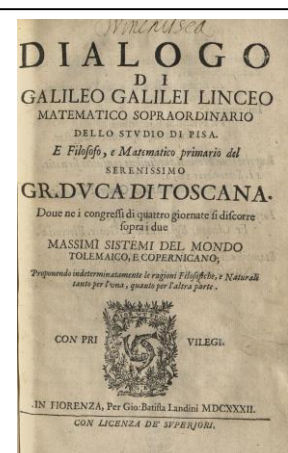
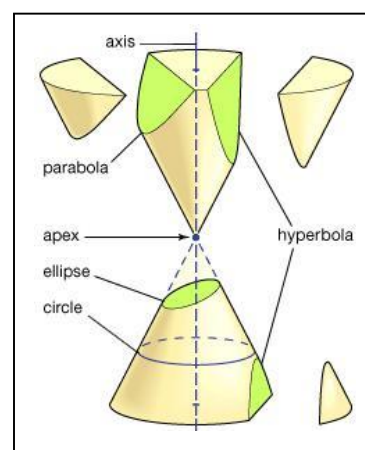
### Galileo Galilei - 1632

Galileo Galilei (1564 – 1642) merket seg oppførselen til tilfeldige avvik. Han publiserte i 1632 om tilfeldige avvik at:

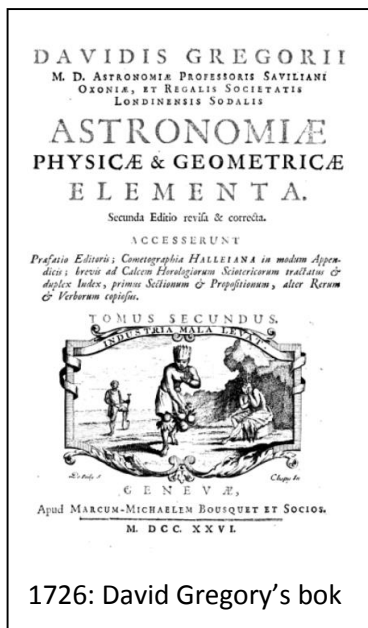
- de er uunngåelige,
- små avvik forekom oftere enn store avvik,
- avvik kan ha samme amplitude og motsatt fortegn,
- sann verdi er der hvor vi har den høyeste konsentrasjonen av måleresultater.



Pytagoras teorem om rettvinklede trekanter og kvadrater



1632 (MDCXXXII): Galileo Galilei publiserte bok om tilfeldige avvik



1726: David Gregory's bok

## Daide Gregorio - Astronomiæ Physicæ & Geometricæ Elementa - 1726

Første gangen «error»-begrepet ble benyttet i matematisk/statistisk sammenheng var av David Gregory i sin bok om elementær astronomi, fysikk og geometri 1726.

Begrepet avvik («error») og avviksteori ble tradisjonelt brukt innen matematikk. "Error" ble definert i Oxford som »the quantity by which a result obtained by observation or by approximate calculation differs from an accurate determination».

## Daniel Bernoulli - 1734

I 1734 utlyste Academie royale des sciences i Paris en penge-konkurranse. De ønsket å vite

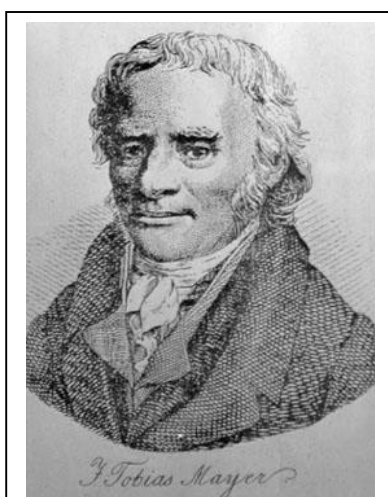
hvorfor planetene vandret rundt solen i nærmest ett plan.

Bernoulli (1700 – 1782) jobbet cirka 1734 med minste (sum av) absolutte avvik regresjonsmetode. Han publiserte *Quelle est la cause physique de l'inclinaison du plan des orbites des planètes par rapport au plan de l'équateur de la révolution du soleil autour de son axe; et d'où vient que les inclinaisons de ces orbites sont différentes entre elles*. Daniel måtte dele prisen med sin far; John, hvilket ikke falt i god jord.

Bernoulli jobbet videre med å bestemme planetbaner basert på observasjoner. De fleste mener at Bernoulli er den første som systematisk jobbet med regresjonsteori.



1734: Daniel Bernoulli



1750: Tobias Mayer studerte solsiden av jordens måne

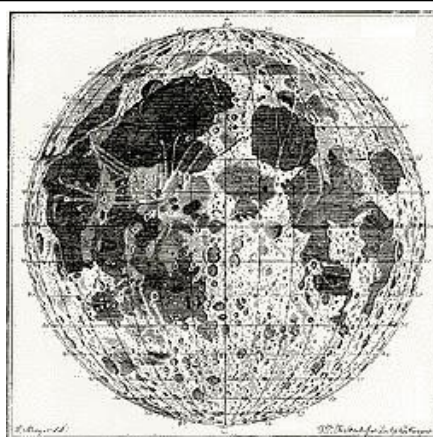
## Tobias Mayer – 1750

Tobias Mayer (1723 – 1762) studerte månens bevegelser. Han observerte at månens side mot jorden variere noe.

Om lag 60 prosent av månens side er visuell mot oss.

Hans observasjoner resulterte i 27 likninger med tre variabler. Han grupperte sine 27 likninger inn i tre undergrupper av ni likninger hver. Innen hver gruppe adderte han likningene sammen. Til

slutt løste han tre likninger med tre variabler.



1750: Tobias Mayer's månekart

## Roger Joseph Boscovich – 1755

Boscovich (Ruđer Josip Bošković 1711- 1787) ble født i republikken Ragusa (dagens Kroatia).

År 1750 – 1752 ble Boscovich engasjert av Paven. Det skulle lages nytt kartsystem for pavestatene. Han og kollega Christopher Marie arbeidet med å måle jordbuen mellom Roma og Rimini; omtalt som Roma-meridianen.

1755 arbeidet Boscovich frem den første prosedyren for å tilpasse en strek (regresjonsmodellen!) til et sett med observasjoner.

Tobias Mayer var noen år tidligere inne på samme tanke, men kom ikke i mål.

Boscovich brukte minste absolutte feil-regresjonsmetoden. Denne regresjonsmetoden har i dag flere navn:

- Least Absolute Deviations (LAD)
- Least Absolute Errors (LAE)
- Least Absolute Value (LAV)
- Least Absolute Residual (LAR).

Han valgte en løsning (matematisk regresjonsmodell) slik summen av de absolutte residualene ble minst mulig.

Boscovich publiserte:

$$y_i = a + bx_i, \text{ hvor } b_{ij} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

I 1757 definerte han at koeffisientene a og b skulle velges slik at avviket:

$$e_i = y_i - a - bx_i$$

skulle ha en nullsum!

I 1757 kom boken hvor Boscovich, sammen med mange andre forfattere, fremla sine resultater.

Marie og Boscovich kunne bestemme posisjon på Nordpolen med en presisjon ingen tidligere hadde oppnådd.

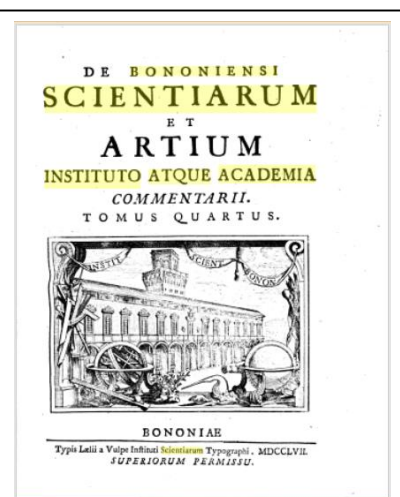
Han var levende opptatt av jordens form. Viktig spørsmål var hvilken matematisk modell kunne jordens form beskrives som. Han studerte ellipseformen til jorden.

Han målte jordbuen ved ulike lengdegrader; nær ekvator og nær ved Nordpolen i et kort buestykke.

Boscovich ville finne ut om jorden hadde flate poler (sammenpresset ellipse), i stedet for at jorden kunne beskrives som en sirkel.



1757: Roger Boscovich studerte jordens elliptiske form



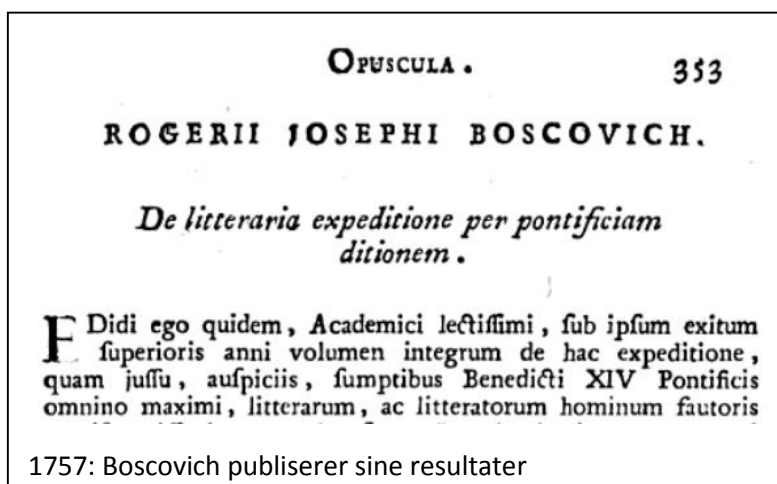
1757: De Bononiensi scientiarum et artium instituto atque academia Commentarii



Han utviklet metode for å bringe hans observasjoner inn i en matematisk modell. Han fant inspirasjon i arbeidet til Isaac Newton.

Et utdrag fra et manuskript viser at Thomas Simpson og Boscovich møtets i 1760. Manuskriptet viser tolkninger av analytiske løsninger. En påstand i manuskriptet sier at det i 1755 ble jobbet med minste kvadraters metode.

Men, kanskje viktigst: Mange fant inspirasjon i arbeidet til Boscovich.



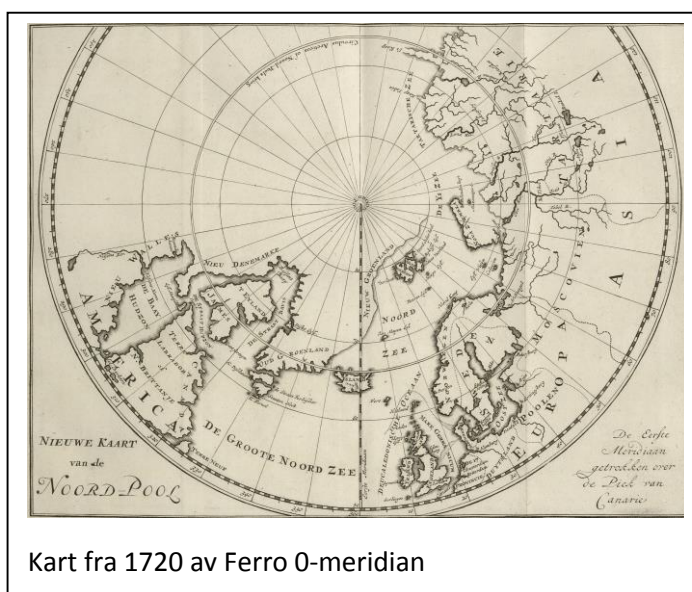
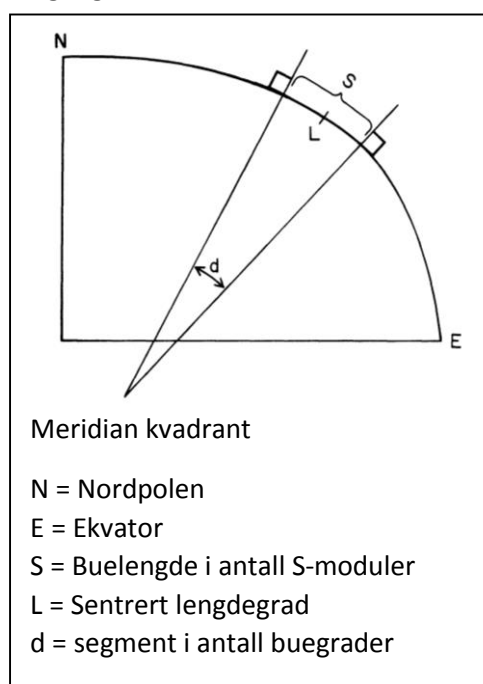
1757: Boscovich publiserer sine resultater

Minste kvadraters metode fikk sitt utspring i minste absolutte feil-metoden, men det skulle gå ytterligere 50 år før noen med sikkerhet publiserte metoden.

Mer om dette senere i jakten etter minste kvadraters metode.

## Det metriske system – 1770 - 1799

I 1634 var øya Ferro (El Hierro, vest av Afrika) det best definerte vestlige punktet, og den franske kongen bestemte at referansepunktet for lengdegradene for kartverket skulle



starte der.

Senere flyttet franskmennene sitt referansepunktet for lengdegradene til Paris-meridianen. Nullpunktet gikk nå gjennom observatoriet i Paris.

I 1770 foreslo det franske vitenskapsakademiet at verden burde få ett felles målesystem. For lengde skulle den nye

enheten være meter. Avstanden mellom ekvator og Nordpolen skulle settes lik 10.000.000 meter.

Frem til da hadde franskmennene og britene hvert sitt målesystem. Franskmennene benyttet blant annet lengdeenheten Toise. Enheten ble først definert i år 790. Dette var avstanden mellom fingertuppene til en utstrakt mann. Og, hadde vi 2 Toise, var dette samme som 1 «Module S».

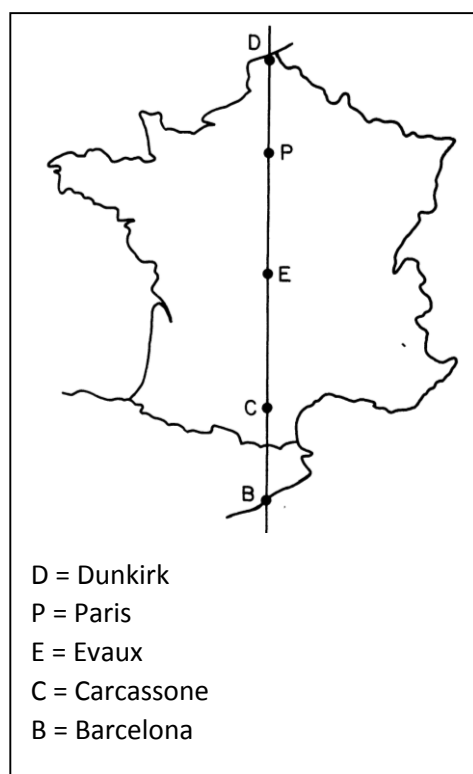
I 1790 bestemte franskmennene at det nye målelengden skulle defineres ved 45 ° nord; halvveis mellom ekvator og Nordpolen.

I 1791 fikk Adrien-Marie Legendre oppdraget om å koble sammen det engelsk og franske kartsystemet. Britene hadde sitt nullpunkt via Greenwich, mens franskmennene hadde sitt Paris. Legendre jobbet et år med oppgaven, men trakk seg fra vervet i 1792.

1795 begynte franskmennene arbeidet med å måle jordens krumning. De startet å måle hva som omtales som den franske meridianen. Avstanden mellom Dunkerque og Barcelona skulle bestemmes.

Utfordringen var å bestemme en matematisk modell som passet til observasjonene. Det skulle vise seg at dette blir et vendepunkt i historien om å komme frem til minste kvadraters metode.

Mange storheter, blant annet Carl Friedrich Gauss, deltok i arbeidet med å beregne jordens buelengde mellom ekvator og Nordpolen.



Det første eksemplaret av meteren ble støpt i bronse i Frankrike i 1795. Med denne som mal ble det lagd 16 eksemplarer i marmor som skulle plasseres på forskjellige steder i Paris. Av de seksten standardene som ble satt opp i tidsrommet 1796 til 1797 i Paris så er dette den eneste gjenværende (36 Rue de Vaugirard) som fortsatt er på sin opprinnelige plass.

1799 ble det produsert platinastaver med ulike lengder. Den stav med lengde nærmest 1/10.000.000 av avstanden mellom ekvator og Nordpolen, ble valgt som definisjon av 1 meter.

På grunn av feilberegning av jordens flathet ved Nordpolen, ble meterstaven 0,2 millimeter for kort. Jordens omkrets om polene ble derfor noe lengre enn de planlagte 40.000.000 meter.

## Adrien-Marie Legendre

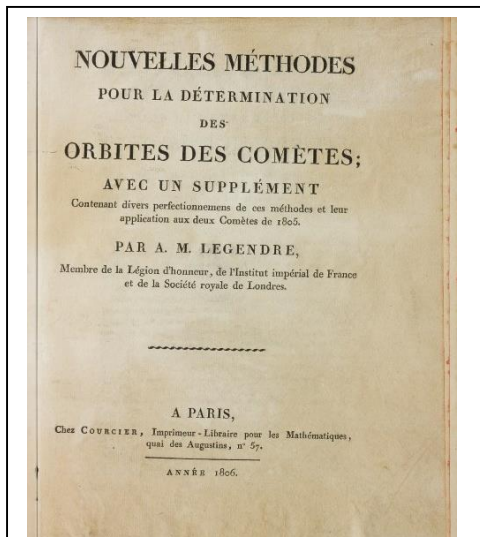
Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) var matematiker og astronom. Han tapte all sin formue i den franske

revolusjonen.

Hans kone, Marguerite-Claudine Couhin, hjalp ham deretter økonomisk. Napoleon reorganiserte 1803 "Institut National des Sciences et des Arts", hvor Legendre var medlem.



1806: Adrien-Marie Legendre publiserer sitt vedlegg, som den første, minste kvadraters metode



Legendre (1806): Nouvelle formula pour réduire en distances vraies les distances apparentes de la Lune au Soleil ou à une étoile.

Legendre publiserte en rekke verk; blant annet i 1806 (førsteutgave signert 5. mars 1805) en bok med vedlegg hvor han introduserte ny formel for å redusere avstander mellom himmelobjekter; bedre kjent i dag som minste kvadraters metode.

Så selv om boken Legendre i 1806 tok for seg komet-baner, omhandlet boken i stor grad om bruk av det nye matematiske verktøyet (minste kvadraters metode).

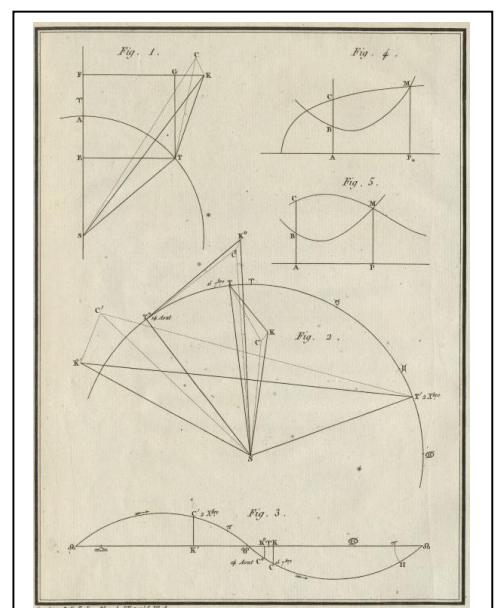
Metoden gikk ut på å finne en teoretisk sammenheng ut fra observerte verdier, og deretter å velge en slik løsning at spriket mellom observasjonene og regresjonsløsningen er minst mulig.

## Minste kvadraters metode - 1806

Legendre definerte formelen (teorem = teori uten sannsynlighetsbevis) som ble publisert 1806;

$$E = a + bx + cy + fz + \dots$$

hvor  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $f$ , og  $\dots$  er de kjente koeffisienter. (De varierer fra den ene funksjon til en annen.)  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , og  $c$  er de ukjente som må fastlegges i samsvar med den betingelse at verdien av  $E$  skal for hver ligning reduseres til en størrelse som enten er null eller meget liten.



Legendre's figurer i boken fra 1806

Dersom det er det samme antall ligninger som ukjente  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , og &c, er det ingen vanskeligheter med å bestemme de ukjente, og feilen  $E$  kan gjøres absolutt null.

I resten av vedlegget tok han et eksempel.

Han brukte data fra undersøkelsen i 1795 med måling av den franske meridianen.

Dette for å bestemme ellipsiteten av jorden, og derav lengden av en meter.

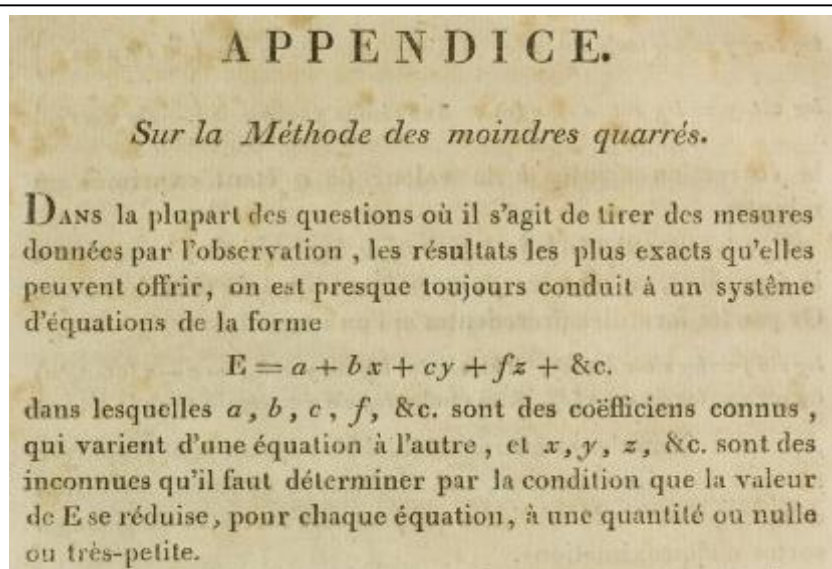
Størrelsene man skal beregne ut fra observasjonene, skal tilfredsstillende en eller flere betingelser, og dette er vanligvis bare tilnærmet mulig.

Ved triangulering skal for eksempel summen av de målte vinkler i en trekant være  $180^\circ$ . Dette oppnås vanligvis ikke på grunn av målefeil og unøyaktighet i målingene.

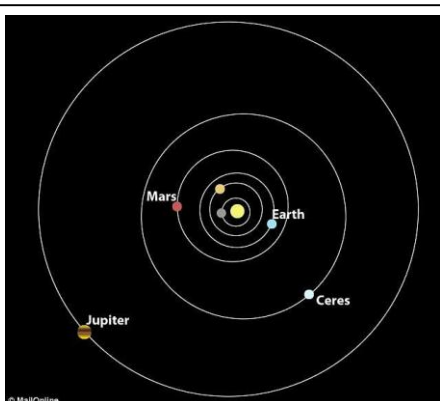
Ved minste kvadraters metode velger man den løsningen som gir at summen av kvadratene av avvikene fra de gitte betingelsene er et minimum.

Historien om “rettighetene” til opphavet av minste kvadraters metode kunne endt her med Legendre i 1806, men nå starter bråket. En av matematikkens store kontroverser starter. De lærde har vel egentlig ikke pr 2015 gravlagt stridsøksen!

La oss gå litt tilbake i tid . . .



1806: Vedlegg til førsteutgaven av Nouvelle formula pour réduire en distances vraies les distances apparentes de la Lune au Soleil ou à une



Ceres som går i bane mellom Mars og Jupiter

## Gåten om den ukjente planeten – 1596

Johannes Kepler (1571 – 1630) var den første til å foreslå i hans *Mysterium Cosmographicum* (1596) at det skulle eksistere en planet mellom Mars og Jupiter. Kepler mente at det var et for stort rom mellom Mars og Jupiter. Han tegnet derfor inn en planet mellom disse.

Oppdagelsen av planeten Uranus i 1781 forsterket antagelsen til Kepler eksistensen av den ukjente planeten mellom Mars og Jupiter.

Johann Elert Bode (1747 – 1826) tok 20. september 1800 initiativ til å danne en gruppe (Vereinigte Astronomische Gessellschaft/Lilienthal Society). Målet var å bestemme banene til planeter.

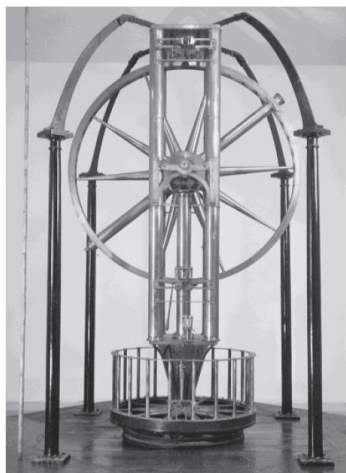


# Gioacchino Giuseppe Maria Ubaldo

## Nicolò Piazzi - 1801

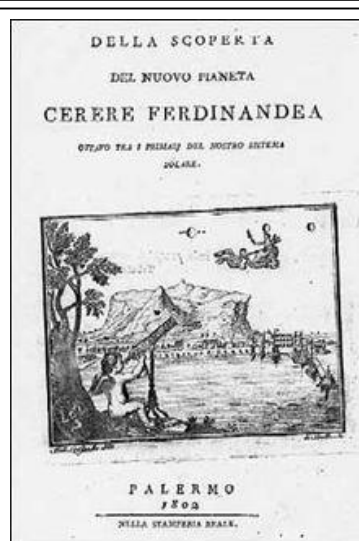
Gioacchino Giuseppe Maria Ubaldo Nicolò Piazzi (1746 – 1826) var italiensk astronom. Piazzi var høsten 1800 uvitende om gruppen til Bode.

På kvelden (20:00) den 1. Januar 1801 jobbet han med sin beryktede stjerne katalog. Den inneholdt 7646 oppslag med enestående presisjon.



Med dette instrumentet oppdaget Piazzi Ceres.

Instrumentet var laget av Jesse Ramsden i 1789. Teleskopet hadde 7,5 cm objektlinse.



Piazzi publiserte sine observasjoner om Ceres



1801: Piazzi oppdager den ukjente planeten

Han oppdaget et lite himmellegeme på skulderen av Taurus. Han målte posisjonen. Dagen etterpå målte han posisjonen på nytt, og oppdaget at det hadde flyttet på seg. Han trodde først

at han hadde gjort en feil, men 4. januar var han overbevist om at hadde funnet en ny «stjerne», kanskje en komet.

Han varslet pressen med en gang, som publiserte nyheten i utenlandske aviser. Piazzi observerte det nye himmellegemet 14 ganger frem mot 24. januar. Selv om han trodde han hadde oppdaget en planet, var han forsiktig, og omtalte funnet som en mulig komet. Februar skrev han til blant annet Bode om sine observasjoner. Piazzi ga himmellegemet navnet «Cerere Ferdinandeia». Piazzi ble syk, men fikk til sammen 21 observasjoner før Ceres ble borte av syne. Observasjonene dekket en bane på 3 ° av totalt 360.

| Beobachtungen des zu Palermo d. 1. Jan. 1801 von Prof. Piazzi neu entdeckten Ceres. |                             |                                  |                                    |                    |                          |                           |                                      |                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|------------------------------------|--------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|-----|
| 1801                                                                                | Mittlere<br>hellen-<br>Zeit | Gerade<br>Aufsteig<br>in<br>Zeit | GeradeAuf-<br>steigung<br>in Grad. | Nördl.<br>Abweich. | Geocentri-<br>sche Länge | Geocentri-<br>sche Breite | Ort der Sonne<br>+ 20"<br>Aberration | Logar.<br>d. Distanz<br>☉ δ |     |
| Jan.                                                                                | 1 8 43 17.8                 | 3 27 11.25                       | 51 47 48.8                         | 15 37 43.5         | 1 23 22 58.3             | 3 6 42.1                  | 9 11 1 36.9                          | 9.9926156                   |     |
|                                                                                     | 2 8 39 4.6                  | 3 26 53.85                       | 51 43 27.8                         | 15 41 55.5         | 1 23 19 44.3             | 3 2 24.9                  | 9 12 2 18.6                          | 9.9926317                   |     |
|                                                                                     | 3 8 34 53.3                 | 3 26 38.4                        | 51 39 36.0                         | 15 44 31.6         | 1 23 16 58.6             | 2 58 9.9                  | 9 13 3 16.6                          | 9.9926324                   |     |
|                                                                                     | 4 8 30 42.1                 | 3 26 23 15                       | 51 35 47.3                         | 15 47 57.6         | 1 23 14 15.5             | 2 53 55.6                 | 9 14 4 14.9                          | 9.9926418                   |     |
|                                                                                     | 10 8 6 15.8                 | 3 25 32.1                        | 51 28 1.5                          | 16 10 32.0         | 1 23 7 59.1              | 2 29 0.6                  | 9 20 10 17.5                         | 9.9927641                   |     |
|                                                                                     | 11 8 2 17.5                 | 3 25 29.73                       | 51 23 26.0                         | ...                | ...                      | ...                       | ...                                  | ...                         | ... |
|                                                                                     | 13 7 54 26.1                | 3 25 30.30                       | 51 22 34.5                         | 16 22 49.5         | 1 23 10 37.6             | 2 16 59.7                 | 9 23 12 13.8                         | 9.9928490                   |     |
|                                                                                     | 14 7 50 21.7                | 3 25 31.72                       | 51 22 55.8                         | 16 27 3.7          | 1 23 12 1.2              | 2 12 56.7                 | 9 24 14 13.5                         | 9.9928809                   |     |
|                                                                                     | 17 7 40 1.0                 | ...                              | ...                                | 16 40 13.0         | ...                      | ...                       | ...                                  | ...                         | ... |
|                                                                                     | 18 7 35 11.3                | 3 25 55.1                        | 51 28 45.0                         | ...                | ...                      | ...                       | ...                                  | ...                         | ... |
|                                                                                     | 19 7 31 28.5                | 3 26 8.15                        | 51 32 2/3                          | 16 49 16.1         | 1 23 25 59.2             | 1 53 38.2                 | 9 29 19 53.6                         | 9.9930607                   |     |
|                                                                                     | 21 7 24 2.7                 | 3 26 34.27                       | 51 38 34.1                         | 16 58 35.9         | 1 23 34 21.3             | 1 46 6.0                  | 10 1 20 40.3                         | 9.9931434                   |     |
|                                                                                     | 22 7 20 21.7                | 3 26 49.42                       | 51 43 21.3                         | 17 3 18.5          | 1 23 39 1.5              | 1 42 28.1                 | 10 2 21 32.0                         | 9.9931886                   |     |
|                                                                                     | 23 7 16 43.5                | 3 27 6.90                        | 51 46 43.5                         | 17 8 5.5           | 1 23 44 15.7             | 1 38 52.1                 | 10 3 22 22.7                         | 9.9932348                   |     |
|                                                                                     | 28 6 58 51.3                | 3 28 54.53                       | 52 13 38.3                         | 17 32 54.1         | 1 24 15 15.7             | 1 21 6.9                  | 10 8 26 20.9                         | 9.9935062                   |     |
|                                                                                     | 30 6 51 52.9                | 3 29 48.14                       | 52 27 2.1                          | 17 43 11.0         | 1 24 30 9.0              | 1 14 16.0                 | 10 10 27 46.2                        | 9.9936132                   |     |
|                                                                                     | 31 6 48 26.4                | 3 30 17.25                       | 52 34 18.8                         | 17 48 21.5         | 1 24 38 7.3              | 1 10 54.6                 | 10 11 28 5.0                         | 9.9937007                   |     |
| Febr.                                                                               | 1 6 44 59.9                 | 3 30 47.2                        | 52 41 48.0                         | 17 53 36.3         | 1 24 46 19.3             | 1 7 30.9                  | 10 12 29 9.6                         | 9.9937705                   |     |
|                                                                                     | 2 6 41 35.8                 | 3 31 19.66                       | 52 49 45.9                         | 17 58 57.5         | 1 24 54 57.9             | 1 4 1.5                   | 10 13 29 49.9                        | 9.9938423                   |     |
|                                                                                     | 5 6 31 31.5                 | 3 33 2.70                        | 53 15 49.5                         | 18 15 1.0          | 1 25 22 45.4             | 0 54 24.9                 | 10 16 31 45.9                        | 9.9940751                   |     |
|                                                                                     | 8 6 21 39.2                 | 3 34 58.50                       | 53 44 37.5                         | 18 31 23.2         | 1 25 53 29.5             | 0 45 5.0                  | 10 19 33 33.9                        | 9.9943276                   |     |
|                                                                                     | 11 6 11 58.2                | 3 37 6.54                        | 54 16 38.1                         | 18 47 58.8         | 1 26 26 40.0             | 0 36 2.9                  | 10 22 35 11.4                        | 9.9945823                   |     |

Piazzi's baneobservasjoner av Ceres januar og februar 1801



Juni 1801 ble astronomimiljøet overbevist om at Ceres var en planet. Astronomimiljøet hadde ingen gode matematiske modeller for å beregne baner med så få observasjoner. De kunne heller ikke finne Ceres på nattehimmelen, og begynte nå å tvile på oppdagelsen til Piezzi.

I septemberutgaven av «Monaliche Correspondenz», ble Piazzis observasjoner publisert. Senere på høsten 1801 kom nyheten til Gauss om den mulige nye planeten. Gauss, 24 år gammel, klarte i løpet av en måned å bestemme en teoretisk ellipse basert på Piazzis sine observasjoner.

Astronomen Zash dirigerte sitt teleskop 7. desember 1801, basert på Gauss sin teoretiske kometbane modell, opp mot nattehimmelen. Zesh bekreftet funnet av Ceres.

## Carl Friedrich Gauss - 1809



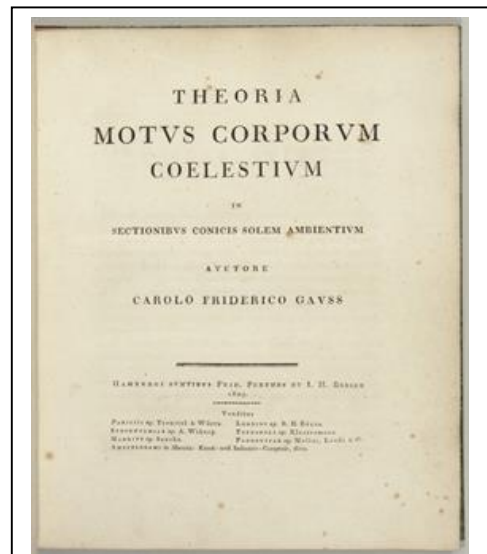
Carl Friedrich Gauss: En av verdens mest betydningsfulle matematikere

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) publiserte 1809 *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium*.

Der startet han en kontrovers med Legendre. Gauss skrev at han hadde brukt minste kvadraters metode allerede 1795 i forbindelse med den Franske meridianen.

Gauss skrev videre at han brukte metoden i 1801, der han utledet metode for kalkulasjon av baner til himmellegemer basert på observasjonene Piazzis gjorde av Ceres.

Gauss anslo hvor Ceres ville finne seg basert på kunnskap om kun 3 ° av dens bane.



1809: Gauss publiserer minste kvadraters metode

Han kombinerte «ny» matematisk metode (minste kvadratets metode) sammen med mer nøyaktig teori om ellipser. Han knyttet sin minste kvadraters metode til sin normalfordelingskurve.

Gauss gir 1809 Legendre medhold i verktøyet Minste kvadraters metode slik Legendre publiserte 1806. Imidlertid, Gauss på sin side sier i 1809 at den metoden hadde han selv brukt mange år tidligere, men valgte ikke å publisere den. Han hadde fortalt metoden til noen andre, blant annet Olbers and Lindenau før 1805.

Gauss var uten tvil en av verdens beste matematikere, men han var ingen statistiker. Gauss hadde en regnekapasitet som overgikk alle på den tiden. Historikerne spør seg derfor om enkeltheten i minste kvadraters metode var for basic til at Gauss kunne «synke så lavt».

Kanskje hadde han metoden i tankene etter søken etter en enda mer perfekt matematisk løsning?

## Kontroversene – 1809 til 1820

Legendre skriver til Gauss bare uker etter at boken ble utgitt mai 1809. Legendre tar til motmæle. Legendre republiserte i 1810 sine oppdagelser av minste kvadraters metode med et nytt vedlegg. I 1812 beviser Gauss sine teoremer (teori uten bevis) ved å føre bevis for minste kvadraters metode.

Krangelen mellom de to intensifiseres i 1817 når Gauss publiserer et verbalt motangrep. I 1820 publiserer Legendre et nytt vedlegg hvor han understreker sine oppdagelser om minste kvadraters metode.

## Typografisk feil i tabell - 1799

Flere historikere har etterprøvd Gauss sine påstander fra 1809 om han faktisk var den første som utviklet og brukte minste kvadraters metode.

Plackett [1972], Sprott [1978], Stigler [1977, 1981] og Stewart [1995] klarer ikke å bevise eller motbevise Gauss sine påstander.

Stigler påpeker i sine funn [1981] at Gauss engasjerte seg i bestemmelse av lengden av den franske meridianen 1795.

1799 publiseres Gauss sine buelengder av den

Franske meridianen, blant annet mellom Pantheon og Evaux til å være 76545,74 moduler. (1 Module = 2 Toise). I følge Gauss ble det gjort en typografisk feil i publiseringen av hans data. Han påpeker senere at buelengden skulle vært publisert lik 76145,74 moduler.

TABLE 1.  
*French arc measurements, from Allgemeine Geographische Ephemeriden, 4, 1799, page xxxv. The number 76545.74 is a misprint; the correct number is 76145.74. The table gives the length of four consecutive segments of the meridian arc through Paris, both in modules S (one module  $\approx$  12.78 feet) and degrees  $\phi$  of latitude (determined by astronomical observation). The latitude of the midpoint L of each arc segment is also given.*

|                         | Modules<br>S | Degrees<br>$\phi$ | Midpoint<br>L |
|-------------------------|--------------|-------------------|---------------|
| Dunkirk to Pantheon     | 62472.59     | 2.18910           | 49° 56' 30"   |
| Pantheon to Evaux       | 76545.74     | 2.66868           | 47° 30' 46"   |
| Evaux to Carcassone     | 84424.55     | 2.96336           | 44° 41' 48"   |
| Carcassone to Barcelona | 52749.48     | 1.85266           | 42° 17' 20"   |
| Totals                  | 275792.36    | 9.67380           |               |

1799: Typografisk feil i tabell hvor Gauss har beregnet lengden av den franske meridianen

Spørsmålet historikerne [Stigler 1981] stiller seg er om Gauss brukte minste kvadraters metode eller en annen metode. Stigler konkluderer med at det er overveiende sannsynlig at Gauss brukte minste kvadratets metode i 1799. Men, det kan ikke utelukkes at Gauss brukte metoden til Boscovich (minste absolutte residual-metode), hvilket ville gi tilnærmet samme sluttvar.

Celmins [1998] gjør et omfattende analysearbeid for å teste metodene Gauss kunne ha brukt 1799. Men nei, konklusjonen om metodevalg (minste absolutte residual eller minste kvadraters metode) forblir åpent.

Etter 1809 forsøkte Gauss å fremskaffe bevis for sine påstander 1809; uten å lykkes. Hans egen dagbok fra 1798 var tapt, hvor han skulle ha indikert sin metode som annerledes enn den teori Pierre Simon De LaPlace (1793) hadde støttet seg til. LaPlace støttet seg til Boscovich sine teorier fra 1755-1757.

Kollegaer til Gauss husket ikke, eller ønsket ikke bli innblandet i disputten mellom Gauss og Legendre, om påståtte samtaler Gauss skulle hatt om minste kvadraters metode.

Kontroversen fortsetter i 1831 da Gauss tidligere elev Heinrich Christian Schumacher (1780 – 1850) skrev til ham om publikasjonen fra 1799. Schumacher foreslo at Gauss skulle repetere kalkulasjonene, og dermed demonstrere at minste kvadraters metode faktisk ble brukt av ham i 1799. Gauss avslo å rekalkulere, og ville ha slutt på den offentlige debatten omkring hans person.

Gauss fikk likevel ikke dette ut av tankene. I 1840 uttrykte han skuffelse i å ikke funnet bevis om minste kvadraters metode i papirene til avdøde Tobias Mayer. Tidligere hadde Gauss trukket frem Mayer som en med stor sannsynlighet hadde brukt minste kvadraters metode, selv før ham selv. Til slutt ga Gauss opp for å finne sine bevis eller støtte.

Celmins [1998] avslutter med å si: «As Gauss suggested, we have to trust his words».

## Legendre vs Gauss: Numerisk integrasjon («Quadrature»)

Det var ikke første gangen Legendre og Gauss var i tottene på hverandre. I 1801 gjorde Gauss krav på et annet teorem (numerisk integrasjon), noe som Legendre tilbakeviser. Legendre skriver at han allerede i 1785 (kalt Legendre Quadrature) brukte Gauss-teoremet fra 1801.

Min reise om minste kvadraters metoden brukt i statistikken er ved veis ende, og nå starter din . . .

Med vennlig hilsen

Trainor Elsikkerhet AS

Rune Øverland  
Senioringeniør

Tønsberg mai 2015