Repeterbarhetskrav vs antall Trails

v/ Rune Øverland, Trainor Automation AS

Artikkelserie

Dette er andre artikkel i en serie av fire om tar for seg repeterbarhetskrav og antall ”trials”.

Formålet med artikkelserien er å bestemme sammenhengen mellom antall Trials og repeterbarhetskravet som må stilles for dette antall Trials.

Den første artikkelen tok for seg måleusikkerhet og sentralverdi. Artikkel ble avsluttet med å vise en spredning (variasjon) basert på en normalfordelingskurve, samt standardavvik (grenseverdi for når man kan vurdere om måleresultatet inneholder systematiske eller grove feil).

Artikkel 2:
Sentralgrenseteoremet vies bred omtale i denne artikkelen. Vi kommer innom primær-populasjonens fordeling, og viktigheten av gjennomsnittverdien av et antall sekundær-populasjoner. Artikkelen avsluttes med hvordan man kan beregne standard usikkerhet for en populasjon.

Introduksjon til Sentralgrenseteoremet

La oss tenke oss oppgaven å bestemme gjennomsnittlig høyde på alle mennesker. Vel, den aritmetiske gjennomsnittsverdien finner vi å legge sammen høyde til alle vel 7 milliarder mennesker å dele denne summen med antall mennesker vi har målt høyden på. Slik:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \; \ldots . + x_n}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Hvor µ er menneskehetens sentralverdi på høyden. Deretter kunne vi kalkulert populasjonens presisjon. Men, i praksis, en mulig oppgave å måle alle x’ene.

Dersom vi derimot kunne nøye oss med å måle høyden på et utvalg av for eksempel 1000 vilkårlige mennesker, kunne dette la seg gjennomføre i virkeligheten.

For en populasjon kan vi skrive:

$$\mu \pm \sigma$$

For utvalget kan vi skrive:

$$\bar{X} \pm s$$

Det viktige spørsmålet er da: Vil utvalget av mennesker være representativ for populasjonen? *Har de samme sentralverdi? Har de samme presisjon?*

Standard usikkerhet (presisjon)

Hvordan regner vi så ut standard usikkerhet (s) for utvalget?

Sentralgrenseteoremet sier at standard usikkerhet er avhengig av standardavviket i populasjonsfordelingen og størrelsen på utvalget.

Problemet er at vi i virkeligheten ikke vet hva standardavviket i populasjonen er, og vi får dermed problemet med å regne ut standard usikkerhet. Da må vi ta sjansen på at standard usikkerhet i utvalget er omtrent det samme som standardavviket i populasjonen. Vi får dermed en tilnærmingsformel for standard usikkerhet.

Jo større utvalget (n) er, jo mindre sjanse er det for at standard usikkerhet for utvalget og populasjonens standardavvik er svært forskjellige.

Sentralgrenseteoremet

Forventningen (μ) og variansen (σ^2) er parametre i populasjonens fordeling. De kalles derfor populasjonsforventningen og populasjonsvariansen henholdsvis, *og begge skal estimeres (E) på grunnlag av det observerte utvalg*.

Anta at utvalget består av (n) uavhengige observasjoner fra en populasjon. Vi har da (n) stokastiske variabler med samme fordeling (som nødvendigvis ikke har en normalfordeling). Vi kaller observasjonene $x_1, x_2, x_3, \ldots .x_n$.

Vi kalkulerer utvalgets sentralverdi:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ \ldots . + x_n}{n}$$

Vi gjentar dette for flere utvalgene etter samme mønster:

	Medlemmer i populasjonen (fra X_{11} til og med X_{mn})		Utvalgens sentralverdier
Utvalg$_1$	x_{11} x_{12} x_{13}	x_{1n}	$\bar{X}_1$
Utvalg$_2$	x_{21} x_{22} x_{23}	x_{2n}	$\bar{X}_2$
…	…		…
Utvalg$_m$	x_{m1} x_{m2} x_{m3}	x_{mn}	$\bar{X}_m$

Tabell: Utvalg fra en populasjon. Hvert utvalg har en sentralverdi.

Vi bestemmer nå en ny, felles, sentralverdi basert på utvalgenes sentralverdier.

$$E(\mu) = E(\bar{\bar{X}}) \ = \ E\left(\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 + \ \ldots . + \bar{X}_m}{m}\right) = E\left(\frac{\mu + \mu + \mu + \ \ldots . + \mu}{m}\right) \frac{1}{m}\ m\mu = \ \mu$$

Dette fordi vi forventer at $E(\bar{X}_i) = \mu$.

Det kan vises at forventningen til sentralverdien for en gruppe $E(\bar{\bar{X}})$, som består av de ulike utvalgssentralverdiene, har samme forventning som sentralverdien til populasjonen $E(\mu)$.

Et eksempel: Utvalgsfordelingen for x_i

Vi velger en liten, oversiktlig populasjon som består av tallene (medlemmene) 2, 3, 4, 5 og 6.

Primærpopulasjonen	Frekvens (f)
$x_1 = 2$	1
$x_2 = 3$	1
$x_3 = 4$	1
$x_4 = 5$	1
$x_5 = 6$	1

Elementene har samme fordeling (f); én av hver, og en merker seg at populasjonens fordeling langt i fra har en normalfordeling.

Vi beregner populasjonen til å ha en sentralverdi lik 4,00 og dennes standardavvik er 1,41.

Fra populasjonen danner vi nye grupper, og vi trekker ut to vilkårlige medlemmer. Følgende utvalg av størrelse "2", det vil si at utvalgsstørrelsen har 2 elementer, kan trekkes ut fra populasjonen:

$\bar{X}_1 \in \{2 \text{ og } 3\}$	$\bar{X}_2 \in \{2 \text{ og } 4\}$	$\bar{X}_3 \in \{2 \text{ og } 5\}$	$\bar{X}_4 \in \{2 \text{ og } 6\}$	$\bar{X}_5 \in \{3 \text{ og } 4\}$
$\bar{X}_6 \in \{3 \text{ og } 5\}$	$\bar{X}_7 \in \{3 \text{ og } 6\}$	$\bar{X}_8 \in \{4 \text{ og } 5\}$	$\bar{X}_9 \in \{4 \text{ og } 6\}$	$\bar{X}_{10} \in \{5 \text{ og } 6\}$

Vi teller opp antall nye utvalg (antall utvalg m = 10). PS: Når vi etablerer nye utvalg, skal dette selvfølgelig gjøres med tilfeldigheter; ikke nødvendigvis slik vi har gjort i dette eksemplet!

Sentralverdien (aritmetisk middelverdi) i hvert av de ti utvalgene over er:

$\bar{X}_1 = 2{,}5$	$\bar{X}_2 = 3{,}0$	$\bar{X}_3 = 3{,}5$	$\bar{X}_4 = 4{,}0$	$\bar{X}_5 = 3{,}5$
$\bar{X}_6 = 4{,}0$	$\bar{X}_7 = 4{,}5$	$\bar{X}_8 = 4{,}5$	$\bar{X}_9 = 5{,}0$	$\bar{X}_{10} = 5{,}5$

Disse sentralverdiene danner basis for et nytt utvalg med følgende frekvensfordeling:

Utvalgenes sentralverdi ($\bar{X}$)	Frekvens (f)
2,5	1
3,0	1
3,5	2
4,0	2
4,5	2
5,0	1
5,5	1

Gruppenes sentralverdi $\bar{\bar{X}} = \left(\frac{\bar{X}_1+\bar{X}_2+\bar{X}_3+\ \ldots.+\bar{X}_m}{m}\right) = 4{,}00$

Gruppenes standard usikkerhet s = 0,87

Vi gjør følgende observasjoner:

1. Populasjonens sentralverdi er lik utvalgfordelingenes sentralverdi (her 4,00).
2. Utvalgenes standard usikkerhet (her s = 0,87) er mindre enn populasjonens standardavvik (her $\sigma = 1{,}41$).
3. Utvalgfordelingens form (fordeling →) skiller seg fra populasjonens form. Utvalgfordelingens form er (fremdeles) ikke normalfordelt, men i sin form avviker den mindre fra en normalfordeling enn hva populasjonen gjør.

Det viser seg erfaringsmessig at utvalgsfordelingens form ligner mer og mer på en normalfordeling når utvalgsstørrelsen (n) øker.

Dette mønster danner grunnlag for sentralgrenseteoremet:

Når utvalgsstørrelsen (n) øker, vil fordelingen (spredningskarakteristikken) til sentralverdien for utvalgsgjennomsnittet, praktisk talt, for en hvilken som helst populasjonfordeling, nærme seg en normalfordeling.

Standard usikkerhet

$$Var[\mu] = Var[\bar{\bar{X}}]$$

$$= Var\left[\frac{1}{n}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \ \ldots + \ \bar{X}_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}Var(x_1) + \frac{1}{n^2}Var(x_2) + \ \ldots + \frac{1}{n^2}Var(x_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \ \ldots + \ \sigma^2)$$

$$= \frac{1}{n^2}n\,\sigma^2$$

$$Var[\bar{\bar{X}}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Variansen til utvalg$_m$ som har basis i sentralverdier fra flere utvalg$_n$ er lik variansen til populasjonen dividert på antall medlemmer (n) som er trukket ut fra populasjonen.

Standard utsikkerhet for et utvalg blir da:

$$\sigma_{\bar{\bar{X}}} = \sqrt{Var[\mu]} = s = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

På engelsk heter dette ”Standard Error of the Mean”, ofte forkortet SEM.

Uttrykt med ord:

Standard usikkerhet = $\frac{\text{standardavviket for populasjonen}}{\sqrt{\text{antall medlemmer i utvalget}}}$

I sentralgrenseteoremet er kravet droppet om at x_i skal være normalfordelt. Teoremet bygger på at fordelingen for $\bar{\bar{X}}$ går mot en normalfordeling når n blir stor nok i stedet for å være normalfordelt.

Dette teoremet sier at vi kan bruke all teori vedrørende normalfordeling også når vi behandler data som ikke er normalfordelt, forutsatt at vi holder oss til sentralverdier med tilstrekkelig store utvalg (n).

Vi kan oppsummere alt slik:

For en populasjon kan vi skrive:

$\mu \pm \sigma$

For utvalget kan vi skrive:

$\bar{X} \pm s \rightarrow \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Artikkel 3

Når utvalget (n) er lite, blir dette en utfordring. Det kan vi ta hensyn til ved å velge en variant av normalfordelingen som varierer med utvalgsstørrelsen. Dette kalles Students t-fordeling. I artikkel tre vil vi ta for oss dette.