Uncertainty of the Uncertainty?
Del 3 av 6

v/Rune Øverland, Trainor Elsikkerhet AS

Dette er del tre i artikkelserien om «*Uncertainty of the Uncertainty*».

I dag skal jeg vise deg hvorledes man bestemmer antall signifikante sifre når vi holder på med måling og statistikk, og hvordan vi rapporter.

GUM, ISO 17025 og EA-4/02

ISO 17025 tar for seg generelle krav til kompetanse for testing og kalibreringslaboratorier.

GUM - «Evaluation of measurement - Guide to the expression of uncertainty in measurement" brukes ofte som referanse. ISO 17025 gjør dette.

"European co-operation for Accreditation" – EA – har gitt ut dokumentet «Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration».

Tidligere artikkelserier

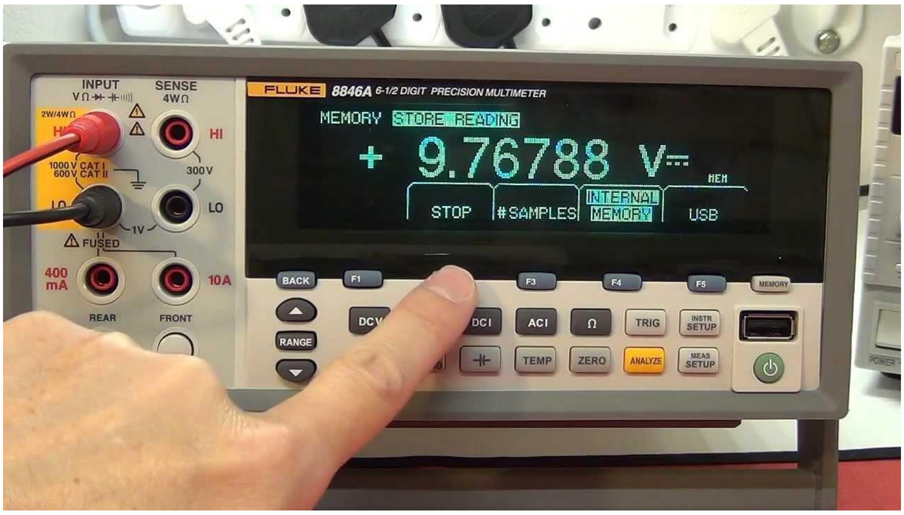
I tidligere artikkelserier har jeg vært inne på beregning av middelverdien (mer presist omtalt som aritmetisk gjennomsnittsverdi), og standardavvik (variasjon i en hel populasjon) eller standard usikkerhet (variasjon i et begrenset utvalg fra en populasjon).

Formålet med denne artikkelserien er ikke å sette opp et fullstendig usikkerhetsbudsjett. I så måte henviser jeg til EA-4/02 dokumentet. Der gis det flere eksempler.

Vårt forenklede måleoppsett

Jeg har et måleoppsett hvor jeg skal måle spenningsfallet over en motstand. Jeg noterer alle sifre i displayet på voltmeteret inn i en tabell. Jeg gjør ti observasjoner. Til slutt kalkuleres middelverdien for måleserien, samt standard usikkerhet.

Vi bruker et kalibrert digitalt multimeter (DMM) for å lese av spenningsfallet. I mitt eksempel tar vi ikke hensyn til om DMM har endret egenskaper siden forrige gang instrumentet ble kalibrert, for eksempel drift i elektronikken grunnet aldring, følsomhet i forhold til omgivelsene (temperatur,



Figur 1: DMM med mange sifre, men alle sifre skal ikke nødvendigvis ikke rapporteres. ☺

fuktighet) og så videre.

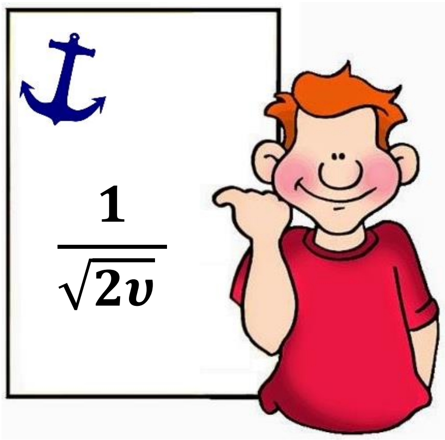
Vi gjør ti observasjoner (avlesninger), og setter verdiene inn i tabellen.

Måling nr.	Avlest måleverdi (Volt)
1	9,76788
2	9,81591
3	9,88139
4	9,78785
5	9,74646
6	9,85363
7	9,84010
8	9,88239
9	9,74247
10	9,82631
Middelverdi	**9,814439**

Det neste spørsmålet vi må stille oss; hvor mange signifikante sifre av middelverdien skal vi rapportere?

a) Antall signifikante sifre som instrumentet viser meg (instrumentets oppløsning)? Nei.
b) Antall signifikante sifre bestemt av måleoppsettets samhandling? Nei. Jeg forutsetter at jeg har notert korrekt det som stod i voltmeterets display.
c) Antall signifikante sifre bestemt av måleoppsettets «tillatte» variasjon i omgivelsene? Ja.

«Uncertainty of the Uncertainty» = $\frac{1}{\sqrt{2\upsilon}}$



Figur 2: John's sin forankring: «2υ"

GUM seksjon E.4.3 er faktisk «triggeren» til denne artikkelserien om «Uncertainty of the Uncertainty».

I denne delen av artikkelserien skal jeg ikke begrunne følgende formel, men kommer tilbake til dette:

«Uncertainty of the Uncertainty» = $\frac{1}{\sqrt{2\upsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$

, hvor υ er antall «Degrees of Freedom» og n er antall observasjoner i en måleserie. I mitt eksempel er [n] lik 10, og υ kalkuleres til (10 – 1) = 9.

Oversatt gir «Uncertainty of the Uncertainty» den *presisjonen* vi har på standard usikkerhet. Generelt kan vi si at dersom man har få observasjoner som grunnlag, kan man heller ikke påberope seg høy presisjon på det beregnede standard usikkerhetstallet. Og mottatt, har man svært mange observasjoner som grunnlag, kan man påberope seg høyere presjon på det beregnede standard usikkerhetstallet.

GUM seksjon 7.2.6

For her det er noe som er viktig! I GUM seksjon 7.2.6 står det skrevet:

»It usually suffices to quote $u_c(y)$ and U to at most two significant digits.»

OK, så GUM vil at vi maksimalt skal bruke to – 2 – signifikante sifre når vi rapporterer måleusikkerheten.

Om vi skal bruke ett eller to signifikante sifre bestemmes av «Uncertainty of the Uncertainty», det vil si hvilken presisjon har vi på tallet som uttrykker måleusikkerheten.

Antall signifikante sifre for «Uncertainty of the Uncertainty»

Tallet, som kalkuleres i «Uncertainty of the Uncertainty», representerer størrelsen på usikkerheten i standard usikkerhet. Det fins altså en objektiv formel som knytter sammen antall observasjoner og antall signifikante sifre vi skal bruke i rapporteringen av standard usikkerhet.

Følgende tabell oppsummerer antall observasjoner i en måleserie og antall signifikante sifre i standard usikkerhet:

Antall observasjoner [n] i en måleserie	**Antall signifikante sifre i standard usikkerhet**
Mellom 1 og 5000	Ett
Mellom 5000 og 500000	To
Mer enn 500000	Tre

I vårt eksempel var [n] = 10, hvilket er i intervallet 1 - 5000 observasjoner pr måleserie. Det innebærer at standard usikkerhet (eller standardavviket) skal rapportens med ett signifikant siffer.

Måleforskriften en gang til . . .

Og, det er her jeg kommer tilbake til Måleforskriften paragraf 8.

For å kunne forankre to signifikante sifre i «Uncertainty of the Uncertainty» må man ha mellom 5000 og 500000 måleobservasjoner.

Min påstand er at ingen i industrien tar kostnaden med å ha minst 5000 observasjoner i per måleserie. Dermed kan de heller ikke påberope seg en presisjon på «Uncertainty» på mer enn ett siffer; ergo ett siffer.

. . . . . Tilbake til måleeksemplet . . . .

Vi kommer frem til tallet for standard usikkerhet slik;

Observasjon	Avlesning (volt)	Avvik	$(\text{Avvik})^2$
1	9,76788	-0,046559	0,00216774
2	9,81591	0,001471	2,1638E-06
3	9,88139	0,066951	0,00448244
4	9,78785	-0,026589	0,00070697
5	9,74646	-0,067979	0,00462114
6	9,85363	0,039191	0,00153593
7	9,84010	0,025661	0,00065849
8	9,88239	0,067951	0,00461734
9	9,74247	-0,071969	0,00517954
10	9,82631	0,011871	0,00014092
	= Gjennomsnitt 9,814439		= Sum 0,02411268

Avvik = Avlesning – Gjennomsnittsverdi = $x_i - \bar{x}$

Vi kalkulerer måleseriens varians [s^2]

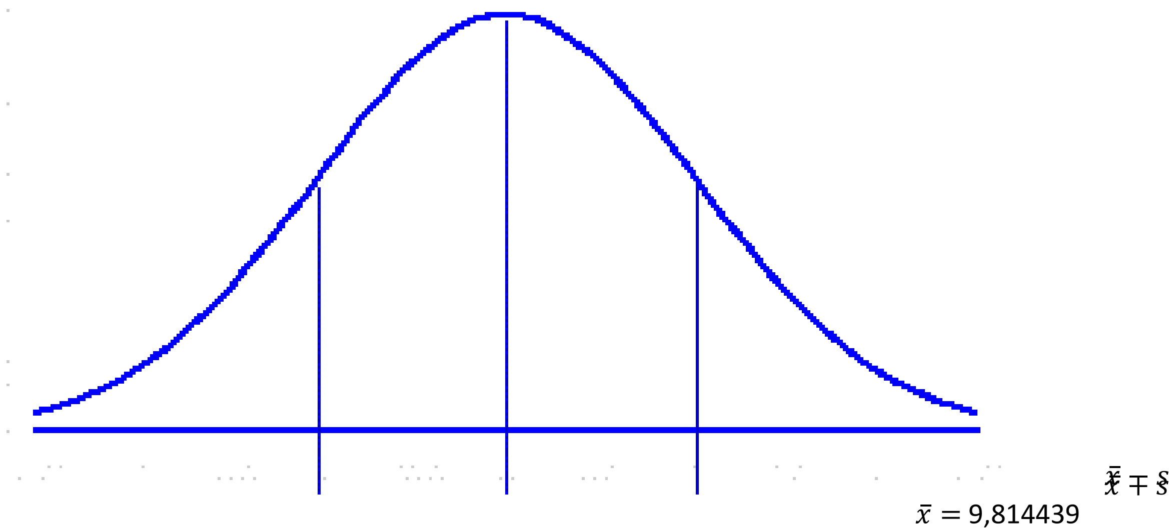
Varians = s^2 = $\frac{(Summen\ av\ avvik)^2}{Antall\ observasjoner}$ · = $\frac{0{,}02411268}{10}$ = 0,002411268 volt^2

Måleseriens standard usikkerhet [s]:

s = $\sqrt{Varians}$ = $\sqrt{s^2}$ = $\sqrt{0{,}002411268}$ = 0,15528257 volt

PS1: Du lurer sikkert på hvorfor jeg bruker så mange sifre i kalkulasjonene. Det gjør jeg fordi jeg ikke har rapportert noe ennå!

PS2: Nå skjønner du sikkert hvorfor GUM i seksjon 7.2.6 sier at «to at most two significante digits». De fleste har 5000 eller færre observasjoner i sin måleserie. Altså; ett signifikant siffer.



Figur 3: Standard usikkerhet med gjennomsnittsverdi og usikkerhetsgrenser

To muligheter for veien videre . . .

OK, la oss gå et skritt videre mot mål! En formel, som jeg skal utlede i neste del av artikkelserien, for standard usikkerhet; er

Standard usikkerhet for måleserien ≈ $\sqrt{\frac{1}{(n-1)}} \cdot s \approx \sqrt{\frac{1}{(10-1)}} \cdot 0{,}15528257 \approx 0{,}05176086$

Symbolet ≈ forteller at det ovenstående egentlig ikke er en likning. Verdiene på høyre siden av ≈ symboler avhenger av et sett med n-måleobservasjoner, og er generelt ikke helt eksakt likt med standard usikkerhet.

Videre, siden vi har mindre enn 5000 observasjoner i måleserien, skulle vi altså rapportere med ett signifikant siffer.

Ved bruk av etablerte avrundingsregler på 0,05176086 med ett signifikant siffer får vi:

Standard usikkerhet = 0,05 volt

I vårt tilfelle har vi to desimaler. Og, måleverdien skal rapporteres med like mange desimaler som vi bruker for standard usikkerhet; slik

9,82 volt.

Rapportering av resultatet fra måleserien

Dokumentet "Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement", også omtalt som GUM, har retningslinjer for rapporteringsformat i seksjon «Reporting uncertainty». Guiden gir oss flere alternativer for rapportering. Blant annet kan jeg rapportere slik:

9,82(0,05) volt.

Det første tallet representerer måleverdien, mens tallet inne i parentesen er verdien på standard usikkerhet.

Forutsatt at vi har en normalfordeling (Gauss-kurve), vil statistisk cirka 68 prosent av målingene bli observert i intervallet <9,77 , 9,87> volt. Utvider vi konfidensintervallet til å omfavne to avvik (2* 0,05), vil cirka 95 prosent av målingene bli observert i intervallet <9,72 , 9,92> volt.

Oppsummering

I de interne kalkulasjonene bruker vi alle sifrene i tallet. Vi ønsker ikke at kalkulasjonen i utregningene skal forringe sluttsvaret.

Det fins en formel som beregner presisjonen i usikkerhetstallet; formelen «Uncertainty of the Uncertainty». Denne styrer hvor mange signifikante sifre vi skal bruke når vi rapporterer standard usikkerhet (for et utvalg) eller standardavvik (for en populasjon).

Basert på (referanse)måleseriens standard usikkerhet, kan man estimere standardavviket for parameteren.

Ved hjelp av sentralgrenseteoremet kan man kalkulere standard usikkerhet for et måleoppsett med kjennskap til standardavviket og antall observasjoner man skal ha i den nye måleserien.

I mine to neste deler i denne artikkelserien om «Uncertainty of the Uncertainty», skal jeg vise utledningen av formler jeg har brukt i denne delen:

Standard usikkerhet for en måleserie ≈ $\sqrt{\frac{1}{(n-1)}} \cdot s$

Uncertainty of the Uncertainty» = $\frac{1}{\sqrt{2\nu}}$

På gjensyn!

Med vennlig hilsen
Trainor Elsikkerhet AS
Rune Øverland
Senioringeniør

Tønsberg juni 2016